

Un théorème du support pour la fibration de Hitchin

Pierre-Henri Chaudouard* et Gérard Laumon

1 Introduction

Soit X une courbe connexe, projective et lisse, de genre g , sur un corps k algébriquement clos. Soit D un diviseur sur X de degré $> 2g - 2$ et soit G un groupe réductif. Notons $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{A}$ la fibration de Hitchin associée à ces données.

Sur l'ouvert elliptique $\mathbb{A}^{\text{ell}} \subset \mathbb{A}$, chaque composante connexe de cette fibration est une gerbe sur un morphisme propre $f^{\text{ell}} : N^{\text{ell}} \rightarrow \mathbb{A}^{\text{ell}}$, de source N^{ell} lisse sur k , auquel on peut appliquer le théorème de décomposition de Beilinson, Bernstein, Deligne et Gabber [3]. L'outil principal dans la démonstration par Ngô [10] du lemme fondamental de Langlands-Shelstad pour G , est un théorème sur les supports des constituents simples de la cohomologie relative de f^{ell} .

Dans [5], nous avons prolongé ce résultat de Ngô à l'ouvert génériquement régulier semi-simple $\mathbb{A}^{\text{ell}} \subset \mathbb{A}^{\text{grss}} \subset \mathbb{A}$ de la fibration de Hitchin.

Dans le cas particulier où k est de caractéristique nulle, $G = \text{GL}(n)$ et D est de degré $> 2g - 2$, le théorème de Ngô sur \mathbb{A}^{ell} et notre extension à \mathbb{A}^{grss} disent que la cohomologie relative de $f^{\text{grss}} : N^{\text{grss}} \rightarrow \mathbb{A}^{\text{grss}}$ (pour un schéma $N^{\text{grss}} \supset N^{\text{ell}}$ convenablement défini à partir de la restriction de \mathcal{N} à \mathbb{A}^{grss}) est complètement déterminée par sa restriction à n'importe quel ouvert non vide de \mathbb{A}^{grss} .

L'objet de cette note est de prolonger ce dernier résultat à \mathbb{A} tout entier.

*soutenu par l'Institut Universitaire de France et les projets Ferplay ANR-13-BS01-0012 et Vargen ANR-13-BS01-0001-01 de l'ANR

2 La fibration de Hitchin

Soient n un entier positif (le rang) et e un entier premier à n (le degré).

Soit k un corps algébriquement clos, soit X une courbe connexe, projective et lisse sur k , de genre g , et soit $D = \sum_x d_x [x]$ un diviseur sur X que l'on suppose effectif ($d_x \geq 0, \forall x$) et de degré

$$d = \sum_x d_x > 2g - 2$$

(voir la section 11 pour des commentaires sur le cas où D est un diviseur canonique et donc $d = 2g - 2$).

Soit enfin ℓ un nombre premier inversible dans k (pour la cohomologie ℓ -adique).

Rappelons [9] qu'un fibré de Hitchin est un couple (\mathcal{E}, θ) formé d'un fibré vectoriel \mathcal{E} sur X , de rang n et de degré e , et d'un endomorphisme tordu $\theta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}(D) := \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D)$ de ce fibré vectoriel. Rappelons aussi que le champ \mathcal{N}_n^e des fibrés de Hitchin est algébrique et localement de type fini sur k .

La base de la fibration de Hitchin est le schéma affine

$$\mathbb{A}_n = \bigoplus_{i=1}^n H^0(X, \mathcal{O}_X(iD));$$

sa dimension $d_{\mathbb{A}_n}$ peut être calculée par le théorème de Riemann-Roch et est égale à

$$d_{\mathbb{A}_n} = n(1 - g) + \frac{n(n+1)}{2}d.$$

La fibration de Hitchin est le morphisme de champs algébriques

$$f_n : \mathcal{N}_n^e \rightarrow \mathbb{A}_n$$

qui envoie (\mathcal{E}, θ) sur le polynôme caractéristique de θ

$$a = (-\mathrm{tr}(\theta), \dots, (-1)^n \det(\theta)).$$

3 Courbes spectrales

Soit

$$p : \Sigma = \mathbb{V}(\mathcal{O}_X(-D)) \rightarrow X$$

l'espace total du fibré en droites $\mathcal{O}_X(D)$ et u la section universelle de $p^*\mathcal{O}_X(D)$. Tout $a \in \mathbb{A}_n$ définit une section globale

$$P_a(u) = u^n + p^*(a_1)u^{n-1} + \cdots + p^*(a_n) \in H^0(\Sigma, p^*\mathcal{O}_X(nD)).$$

La courbe spectrale

$$X_a = X_{n,a} \subset \Sigma$$

est le diviseur de Cartier des zéros de cette section $P_a(u)$. Un théorème de Bertini assure que X_a est connexe, mais elle n'est pas nécessairement irréductible, ni réduite. La restriction $\pi_a : X_a \rightarrow X$ de p à X_a est un morphisme fini et plat de degré n , et on a

$$\pi_{a,*}\mathcal{O}_{X_a} = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-D) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X(-(n-1)D),$$

de sorte que

$$\chi(X_a, \mathcal{O}_{X_a}) = n(1-g) - \frac{n(n-1)}{2}d.$$

Pour $a \in \mathbb{A}_n$, soit $X_{a,\eta}$ la fibre de $\pi_a : X_a \rightarrow X$ au point générique η de X et $j_a : X_{a,\eta} \hookrightarrow X_a$ l'inclusion ; $X_{a,\eta}$ est une réunion disjointe finie de schémas artiniens, un pour chaque point générique de X_a .

Suivant la définition donnée par Schaub [13], un module sans torsion de rang 1 sur X_a est un \mathcal{O}_{X_a} -module cohérent \mathcal{F} tel que l'homomorphisme canonique

$$\mathcal{F} \rightarrow j_{a,*}j_a^*\mathcal{F}$$

est injectif et tel qu'en chaque point générique de X_a , les fibres de \mathcal{F} et \mathcal{O}_{X_a} ont la même longueur.

Si X_a est réduite, c'est la notion habituelle ; en particulier, \mathcal{F} est localement libre de rang 1 sur le lieu lisse de X_a .

Si \mathcal{F} est un module sans torsion de rang 1 sur X_a ,

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}} = \pi_{a,*}\mathcal{F}$$

est un fibré vectoriel de rang n et la multiplication par u le munit d'un endomorphisme tordu $\theta_{\mathcal{F}} : \mathcal{E}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(D)$. On vérifie à l'aide du théorème de Riemann-Roch que

$$\deg(\mathcal{F}) := \chi(X_a, \mathcal{F}) - \chi(X_a, \mathcal{O}_{X_a}) = \deg(\mathcal{E}_{\mathcal{F}}) + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

Théorème 1 (Hitchin [9] si X_a est lisse ; Beauville, Narasimhan et Ramanan [2] si X_a est intègre ; Schaub [13] en général). *Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto (\mathcal{E}_{\mathcal{F}}, \theta_{\mathcal{F}})$ est un isomorphisme du champ modulaire des modules sans torsion de rang 1 et degré $e + \frac{n(n-1)}{2}d$ sur X_a , sur le champ algébrique $f_n^{-1}(a) \subset \mathcal{N}_n^e$.*

4 Symétries

Soit \mathcal{P}_n la composante de degré 0 du champ de Picard relatif de la courbe spectrale universelle (le diviseur de Cartier relatif dans $\mathbb{A}_n \times_k \Sigma / \mathbb{A}_n$ défini par l'équation $P_a(u) = 0$) : pour chaque $a \in \mathbb{A}_n$, $\mathcal{P}_{n,a}$ est le champ de Picard des modules inversibles de degré 0 sur X_a .

Ce champ de Picard \mathcal{P}_n agit sur \mathcal{N}_n^e : si $\mathcal{L} \in \mathcal{P}_{n,a}$ et \mathcal{F} est un module sans torsion de rang 1 sur X_a , l'action est définie par

$$\mathcal{L} \cdot (\mathcal{E}_{\mathcal{F}}, \theta_{\mathcal{F}}) = (\mathcal{E}_{\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}}, \theta_{\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}}).$$

Le champ algébrique \mathcal{P}_n n'est ni séparé, ni de type fini, mais sa composante neutre $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{P}_n$ admet un espace grossier J_n qui est un schéma en groupes, séparé, lisse et de type fini sur \mathbb{A}_n [4]. Pour chaque $a \in \mathbb{A}_n$, $J_{n,a}$ est le schéma en groupes des classes d'isomorphie de fibrés inversibles sur X_a dont la restriction à chaque composante irréductible de X_a est de degré 0.

Soit $\mathbb{A}_n^{\text{lisse}} \subset \mathbb{A}_n$ l'ouvert dense au-dessus duquel la courbe spectrale est lisse. La restriction $J_n^{\text{lisse}} = J_n|_{\mathbb{A}_n^{\text{lisse}}}$ est un schéma abélien. La restriction $\mathcal{N}_n^e|_{\mathbb{A}_n^{\text{lisse}}}$ admet un espace de module grossier $f_n^{\text{lisse}} : N_n^{e,\text{lisse}} \rightarrow \mathbb{A}_n^{\text{lisse}}$ qui est un torseur sous J_n^{lisse} . Les morphismes f_n^{lisse} et $J_n^{\text{lisse}} \rightarrow \mathbb{A}_n^{\text{lisse}}$ sont tous les deux lisses, purement de dimension relative

$$d_{f_n} = n(g-1) + \frac{n(n-1)d}{2} + 1.$$

Par suite le faisceau ℓ -adique $R^1 f_{n,*}^{\text{lisse}} \mathbb{Q}_{\ell}$ est un système local de rang $2d_{f_n}$ et

$$R^i f_{n,*}^{\text{lisse}} \mathbb{Q}_{\ell} = \bigwedge^i R^1 f_{n,*}^{\text{lisse}} \mathbb{Q}_{\ell}, \quad \forall i = 0, 1, \dots, 2d_{f_n}.$$

5 Rappels sur les faisceaux pervers

Soit A un schéma de type fini sur k . Dans la catégorie dérivée $D_c^b(A, \mathbb{Q}_{\ell})$ des faisceaux ℓ -adiques sur A , on a la sous-catégorie pleine des faisceaux pervers $\text{Perv}(A, \mathbb{Q}_{\ell})$ définie par Beilinson, Bernstein, Deligne et Gabber [3].

La catégorie $\text{Perv}(A, \mathbb{Q}_{\ell})$ est abélienne. La dualité de Poincaré sur $D_c^b(A, \mathbb{Q}_{\ell})$ envoie $\text{Perv}(A, \mathbb{Q}_{\ell})$ dans elle-même. On a des foncteurs de cohomologie ${}^p\mathcal{H}^i : D_c^b(A, \mathbb{Q}_{\ell}) \rightarrow \text{Perv}(A, \mathbb{Q}_{\ell})$ qui vérifient les propriétés usuelles (suite exacte longue de cohomologie, ...).

Tous les objets de $\text{Perv}(A, \mathbb{Q}_\ell)$ sont de longueur finie. Les objets simples sont les faisceaux pervers de la forme

$$i_{a,*} \text{IC}_{\overline{\{a\}}, \mathcal{L}}[d_a]$$

où $a \in A$ (un point au sens de Zariski, non fermé en général),

$$i_a : \overline{\{a\}} \hookrightarrow A$$

est l'adhérence de Zariski de a dans A , d_a est la dimension de $\overline{\{a\}}$, \mathcal{L} est un système local ℓ -adique irréductible sur $\{a\}$ qui se prolonge à un voisinage ouvert de a dans $\overline{\{a\}}$, et $\text{IC}_{\overline{\{a\}}, \mathcal{L}}$ est le complexe d'intersection de $\overline{\{a\}}$ à valeurs dans \mathcal{L} (en particulier, $\text{IC}_{\overline{\{a\}}, \mathcal{L}}|_{\{a\}} = \mathcal{L}[0]$).

Tout faisceau pervers semi-simple K sur A admet donc une décomposition

$$K \cong \bigoplus_{a \in A} i_{a,*} \text{IC}_{\overline{\{a\}}, \mathcal{L}_a}[d_a]$$

où pour chaque a , \mathcal{L}_a est un système local ℓ -adique semi-simple sur $\{a\}$ qui se prolonge à un voisinage ouvert de a dans $\overline{\{a\}}$.

Un complexe $K \in D_c^b(A, \mathbb{Q}_\ell)$ est dit semi-simple si

$$K \cong \bigoplus_i {}^p\mathcal{H}^i K[-i]$$

et si chaque ${}^p\mathcal{H}^i K$ est un faisceau pervers semi-simple. Un tel complexe admet une décomposition

$$K \cong \bigoplus_{a \in A} \bigoplus_i i_{a,*} \text{IC}_{\overline{\{a\}}, \mathcal{L}_a^i}[d_a - i]$$

où pour chaque a et chaque i , \mathcal{L}_a^i est un système local ℓ -adique semi-simple sur $\{a\}$ qui se prolonge à un voisinage ouvert de a dans $\overline{\{a\}}$. On note alors

$$\text{Socle}(K) = \{a \in A \mid \exists i \text{ tel que } \mathcal{L}_a^i \neq (0)\},$$

et pour chaque $a \in \text{Socle}(K)$,

$$n_a^+(K) = \text{Sup}\{i \mid \mathcal{L}_a^i \neq (0)\} \text{ et } n_a^-(K) = \text{Inf}\{i \mid \mathcal{L}_a^i \neq (0)\}.$$

L'amplitude en a de K est l'entier

$$\text{Amp}_a(K) = n_a^+(K) - n_a^-(K)$$

Si K est auto-dual, on a $n_a^+(K) = -n_a^-(K)$ et donc $\text{Amp}_a(K) = 2n_a^+(K)$.

Un résultat fondamental de la théorie des faisceaux pervers est le théorème de décomposition.

Théorème 2 (Beilinson, Bernstein, Deligne et Gabber [3]). *Soient N un schéma lisse purement de dimension d_N sur k et $f : N \rightarrow A$ un morphisme propre. Alors le complexe auto-dual $Rf_*^{\text{ell}} \mathbb{Q}_\ell[d_N]$ est semi-simple.*

6 Le théorème de Ngô sur le lieu elliptique

Le lieu elliptique est l'ouvert $\mathbb{A}_n^{\text{ell}} \subset \mathbb{A}_n$ au-dessus duquel X_a est intègre ; il contient le lieu lisse.

Nous savons d'après les travaux de Altmann et Kleiman [1], qu'au-dessus du lieu elliptique, l'espace grossier du champ \mathcal{N}_n^e est un schéma $N_n^{e,\text{ell}}$ sur lequel le schéma en groupes lisse $J_n^{\text{ell}} = J_n|_{\mathbb{A}_n^{\text{ell}}}$ agit. De plus, le schéma $N_n^{e,\text{ell}}$ est lisse de dimension $d_{N_n^{e,\text{ell}}} = d_{\mathbb{A}_n} + d_{f_n} = n^2d + 1$ sur k , et la fibration de Hitchin $f_n^{\text{ell}} : N_n^{e,\text{ell}} \rightarrow \mathbb{A}_n^{\text{ell}}$ est plate, projective, à fibres connexes de dimension d_{f_n} .

Comme $N_n^{e,\text{ell}}$ est lisse sur k et $f_n^{\text{ell}} : N_n^{e,\text{ell}} \rightarrow \mathbb{A}_n^{\text{ell}}$ est propre, le complexe auto-dual $Rf_{n,*}^{\text{ell}} \mathbb{Q}_{\ell}[d_{N_n^{e,\text{ell}}}]$ est semi-simple d'après le théorème de décomposition.

Dans le cas particulier considéré, le théorème cohomologique principal de Ngô dans sa preuve du lemme fondamental de Langlands-Shelstad s'énonce :

Théorème 3 (Ngô [10]). *Si k est de caractéristique nulle, le socle du complexe auto-dual $Rf_{n,*}^{\text{ell}} \mathbb{Q}_{\ell}[d_{N_n^{e,\text{ell}}}]$ est réduit au point générique de \mathbb{A}_n . En d'autres termes on a un isomorphisme*

$$Rf_{n,*}^{\text{ell}} \mathbb{Q}_{\ell} \cong \bigoplus_i \text{IC}_{\mathbb{A}_n^{\text{ell}}, R^i f_{n,*}^{\text{lisse}} \mathbb{Q}_{\ell}}[-i].$$

Les ingrédients principaux de la preuve sont :

- l'action de J_n^{ell} sur la partie elliptique de la fibration de Hitchin est suffisamment libre pour borner inférieurement l'amplitude en a de $Rf_{n,*}^{\text{ell}} \mathbb{Q}_{\ell}[d_{N_n^{e,\text{ell}}}]$, et donc supérieurement la codimension de a dans $\mathbb{A}_n^{\text{ell}}$, pour chaque $a \in \text{Socle}(Rf_{n,*}^{\text{ell}} \mathbb{Q}_{\ell}[d_{N_n^{e,\text{ell}}}]$).
- une inégalité de type Severi qui borne inférieurement la codimension de tout point dans $\text{Socle}(Rf_{n,*}^{\text{ell}} \mathbb{Q}_{\ell}[d_{N_n^{e,\text{ell}}}]$) (pour le moment, cette inégalité n'est disponible en toute généralité qu'en caractéristique nulle).

Plus précisément, soient A un schéma séparé de type fini sur k et soit J un schéma en groupes commutatifs, lisse, de type fini et à fibres connexes sur A .

Pour chaque $a \in A$ et chaque point géométrique $\bar{a} \rightarrow a$ on a un dévissage

$$0 \rightarrow J_{\bar{a}}^{\text{aff}} \rightarrow J_{\bar{a}} \rightarrow J_{\bar{a}}^{\text{ab}} \rightarrow 0$$

où $J_{\bar{a}}^{\text{ab}}$ est une variété abélienne et $J_{\bar{a}}^{\text{aff}}$ est affine. Les dimensions de $J_{\bar{a}}^{\text{aff}}$ et $J_{\bar{a}}^{\text{ab}}$ dépendent seulement de a et sont notées dans la suite $d_a^{\text{aff}}(J)$ et $d_a^{\text{ab}}(J)$.

Soit $f : N \rightarrow A$ un A -schéma, muni d'une action de J .

Théorème 4 (Ngô [10]). *On suppose que $f : N \rightarrow A$ est projectif, purement de dimension relative d_f , que N est lisse sur k (purement de dimension $d_N = d_A + d_f$), que les stabilisateurs dans J des points fermés dans N sont tous affines, et que le module de Tate $V_\ell(J)$ est polarisable. Alors pour tout $a \in \text{Socle}(Rf_*\mathbb{Q}_\ell[d_N])$, on a*

$$2d_N - d_f + d_a \geq \frac{1}{2}\text{Amp}_a(Rf_*\mathbb{Q}_\ell[d_N]) \geq d_a^{\text{ab}}(J),$$

soit encore

$$d_f - d_A + d_a \geq n_a^+(Rf_*\mathbb{Q}_\ell[d_N]) \geq d_a^{\text{ab}}(J).$$

Pour tout $a \in \mathbb{A}_n^{\text{ell}}$, la courbe spectrale X_a est intègre et on peut donc introduire sa normalisation \tilde{X}_a . On note

$$\delta_{X_a} = \text{long}(\mathcal{O}_{\tilde{X}_a}/\mathcal{O}_{X_a}).$$

On a

$$d_{f_n} - d_a^{\text{ab}}(J_n) = d_a^{\text{aff}}(J_n) = \delta_{X_a}$$

puisque la jacobienne de \tilde{X}_a est la partie abélienne de la composante neutre $J_{n,a}$ du schéma de Picard de X_a .

Théorème 5 (Diaz and Harris [6]). *Si k est de caractéristique nulle, pour tout $a \in \mathbb{A}_n^{\text{ell}}$, on a l'inégalité de Severi*

$$d_{\mathbb{A}_n} - d_a \geq \delta_{X_a} = d_a^{\text{aff}}(J_n),$$

ou de manière équivalente

$$d_a^{\text{ab}}(J_n) \geq d_{f_n} - d_{\mathbb{A}_n} + d_a.$$

La preuve du théorème 3 de Ngô consiste à combiner les inégalités de dimension formulées ci-dessus :

Démonstration. Soit $a \in \text{Socle}(Rf_{n,*}^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell[d_{N_n^{\text{e,ell}}}]$). En combinant le théorème 4 et l'inégalité de Severi (théorème 5), on obtient

$$d_a^{\text{ab}}(J_n^{\text{ell}}) = n_a^+(Rf_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell[d_{N_n^{\text{e,ell}}}] = d_a - (d_{\mathbb{A}_n} - d_{f_n}).$$

La seconde de ces inégalités implique que $Rf_{n,*}^{\text{ell},2d_n}\mathbb{Q}_\ell$ admet comme facteur direct un faisceau ℓ -adique non trivial de support $\overline{\{a\}}$.

Mais si a n'est pas le point générique de $\mathbb{A}_n^{\text{ell}}$, c'est impossible. En effet les fibres de f_n^{ell} étant toutes irréductibles d'après Altmann et Kleiman [1], on a

$$Rf_{n,*}^{\text{ell},2d_n}\mathbb{Q}_\ell \cong \mathbb{Q}_\ell.$$

□

7 Hors du lieu elliptique

Hors du lieu elliptique, \mathcal{N}_n^e est plus compliqué :

- même si l'on tue les automorphismes scalaires, \mathcal{N}_n^e reste hautement non séparé : les groupes d'automorphismes sont affines mais ne sont pas finis en général ;
- \mathcal{N}_n^e est localement de type fini mais n'est plus quasi-compact.

Pour obtenir un espace plus utilisable, on tronque \mathcal{N}_n^e à l'aide la stabilité au sens de Mumford, Narasimhan, Seshadri et Hitchin.

Tout fibré vectoriel $\mathcal{F} \neq (0)$ a une pente

$$\mu(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F})/\text{rank}(\mathcal{F}).$$

Définition 1 (Hitchin). *Un fibré de Hitchin (\mathcal{E}, θ) est stable si pour tout sous-fibré $(0) \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ tel que $\theta(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}(D)$, on a*

$$\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E}).$$

Théorème 6 (Hitchin, Nitsure [11]). *Les fibrés de Hitchin stables forment un sous-champ ouvert $\mathcal{N}_n^{e, \text{st}}$ qui admet un schéma de modules grossier $N_n^{e, \text{st}}$.*

Le schéma $N_n^{e, \text{st}}$ est lisse purement de dimension $d_{\mathbb{A}_n} + d_{f_n} = n^2d + 1$ sur k . Le morphisme $f_n^{\text{st}} : N_n^{e, \text{st}} \rightarrow \mathbb{A}_n$ est projectif à fibres connexes.

8 Dimension des fibres de la fibration de Hitchin

Nous avons vu que le morphisme $f_n : N_n^{e, \text{lisse}} \rightarrow \mathbb{A}_n^{\text{lisse}}$ est lisse purement de dimension relative d_{f_n} . Par suite le morphisme de champs $f_n : \mathcal{N}_n^e \rightarrow \mathbb{A}_n$ est purement de dimension relative $d_{f_n} - 1$ au-dessus de l'ouvert $\mathbb{A}_n^{\text{lisse}}$.

Il en est de même au-dessus de l'ouvert elliptique et plus généralement au-dessus de l'ouvert $\mathbb{A}_n^{\text{grss}} \subset \mathbb{A}_n$ où X_a est réduite, c'est-à-dire où θ est génériquement régulier semi-simple. En effet, au-dessus de $\mathbb{A}_n^{\text{grss}}$, l'ouvert des modules inversibles sur X_a est dense dans le champ $f_n^{-1}(a)$ des modules sans torsion de rang générique 1 sur X_a , d'après Esteves [7].

Nous démontrerons plus loin (cf. section 10) que :

Proposition 1. *Le cône global nilpotent, i.e. la fibre en 0 de la fibration de Hitchin $\mathcal{N}_n^e \rightarrow \mathbb{A}_n$, est de dimension au plus $d_{f_n} - 1$.*

Corollaire 1. *Le morphisme $f_n^{\text{st}} : N_n^{e,\text{st}} \rightarrow \mathbb{A}_n$ est purement de dimension relative d_{f_n} .*

Démonstration. D'après la proposition, $(f_n^{\text{st}})^{-1}(0)$ est de dimension au plus d_{f_n} , or la dimension des fibres de f_n^{st} ne peut pas chuter par spécialisation. \square

9 Le théorème principal

Il résulte du théorème de décomposition que $Rf_{n,*}^{\text{st}} \mathbb{Q}_\ell[d_{\mathbb{A}_n} + d_{f_n}]$ est semi-simple.

Le théorème suivant prolonge le théorème 3 de Ngô, et aussi notre extension du théorème 3 à l'ouvert génériquement régulier semi-simple [5].

Théorème 7. *Si k est de caractéristique nulle, le socle de $Rf_{n,*}^{\text{st}} \mathbb{Q}_\ell$ est réduit au point générique de \mathbb{A}_n . En d'autres termes on a un isomorphisme*

$$Rf_{n,*}^{\text{st}} \mathbb{Q}_\ell \cong \bigoplus_i \text{IC}_{\mathbb{A}_n, R^i f_{n,*}^{\text{lis}} \mathbb{Q}_\ell}[-i].$$

Démonstration. Soit Λ_n l'ensemble des couples $(\underline{n}, \underline{m})$ de suites $\underline{n} = (n_1 \geq \dots \geq n_s)$ et $\underline{m} = (m_1, \dots, m_s)$ d'entiers strictement positifs telles que

$$n = n_1 m_1 + \dots + n_s m_s.$$

Pour chaque $\lambda = (\underline{n}, \underline{m})$ on a un morphisme fini

$$\iota_\lambda : \mathbb{A}_{n_1} \times_k \dots \times_k \mathbb{A}_{n_s} \rightarrow \mathbb{A}_n$$

défini par $P_{\iota_\lambda(a_1, \dots, a_s)}(u) = P_{a_1}^{m_1}(u) \dots P_{a_s}^{m_s}(u)$.

Pour chaque $a \in \mathbb{A}_n$, il existe un unique $\lambda = \lambda(a) \in \Lambda_n$ tel que a puisse s'écrire $a = \iota_\lambda(a_1, \dots, a_s)$ avec des $a_i \in \mathbb{A}_{n_i}^{\text{ell}}$ et $P_{a_i}(u) \neq P_{a_j}(u)$, $\forall i \neq j$. Les X_{n_i, a_i} sont les composantes irréductibles de X_a et, pour chaque i , m_i est la multiplicité de X_{n_i, a_i} dans le diviseur de Cartier X_a .

Les ensembles $\mathbb{A}_{n, \lambda} = \{a \in \mathbb{A}_n \mid \lambda(a) = \lambda\}$ forment une stratification de \mathbb{A}_n par des parties localement fermées, la strate ouverte étant $\mathbb{A}_{n, ((n), (1))} = \mathbb{A}_n^{\text{ell}}$ et la strate fermée étant la strate « nilpotente » $\mathbb{A}_{n, ((1), (n))}$.

Pour $\lambda = (\underline{n}, \underline{m}) \in \Lambda_n$ et $a = \iota_\lambda(a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{A}_{n, \lambda}$ avec des $a_i \in \mathbb{A}_{n_i}^{\text{ell}}$ comme ci-dessus, on pose $n' = n_1 + \dots + n_s$ et on définit $a' \in \mathbb{A}_{n'}^{\text{grss}}$ par $P_{a'}(u) = P_{a_1}(u) \dots P_{a_s}(u)$, de sorte que $X_{a'}$ n'est autre que la courbe réduite $(X_a)_{\text{red}}$.

On a un homomorphisme de restriction de X_a à $X_{a'}$

$$J_{n,a} \rightarrow J_{n',a'}$$

qui est surjectif, et dont le noyau est affine et est une extension successive de copies du groupe additif. De plus on a un homomorphisme

$$J_{n',a'} \rightarrow J_{n_1,a_1} \times_k \cdots \times_k J_{n_s,a_s}$$

qui est lui aussi surjectif à noyau affine. Par suite

$$d_a^{\text{ab}}(J_n) = d_{a_1}^{\text{ab}}(J_{n_1}) + \cdots + d_{a_s}^{\text{ab}}(J_{n_s}).$$

Si $a = \iota_\lambda(a_1, \dots, a_s)$ est de plus dans $\text{Socle}(Rf_{n,*}^{\text{st}} \mathbb{Q}_\ell)$, on a d'une part

$$d_{f_n} - d_{\mathbb{A}_n} + d_a \geq d_a^{\text{ab}}(J_n)$$

d'après le théorème 4, et d'autre part, pour chaque i , on a

$$d_{a_i}^{\text{ab}}(J_{n_i}) \geq d_{f_{n_i}} - d_{\mathbb{A}_{n_i}} + d_{a_i}$$

d'après le théorème 5 appliqué à $a_i \in \mathbb{A}_{n_i}^{\text{ell}}$. Or

$$d_a = d_{a_1} + \cdots + d_{a_s},$$

$$d_{f_n} - d_{\mathbb{A}_n} = n(2g - 2 - d) + 1$$

et

$$d_a^{\text{ab}}(J_n) = d_{a_1}^{\text{ab}}(J_{n_1}) + \cdots + d_{a_s}^{\text{ab}}(J_{n_s}).$$

Par suite on obtient l'inégalité

$$1 - s \geq (n - n_1 - \cdots - n_s)(d - 2g + 2)$$

qui n'est possible que si $s = 1$ et $n_1 = n$, c'est-à-dire $\mathbb{A}_{n,\lambda} = \mathbb{A}_n^{\text{ell}}$ puisque l'on a supposé $d > 2g - 2$. \square

10 Dimension du cône global nilpotent

Dans cette section, nous allons démontrer la proposition 1.

Comme X et D sont définis sur une extension de type fini sur le corps premier contenu dans k (\mathbb{Q} ou \mathbb{F}_p), il suffit de le faire quand k est la clôture algébrique d'un corps fini \mathbb{F}_q et quand X et D sont définis sur ce corps fini.

Pour tout objet (\mathcal{E}, θ) de $f_n^{-1}(0)$, il existe un entier $1 \leq s \leq n$ tel que $\theta^s = 0$ et $\theta^{s-1} \neq 0$ et on a le drapeau des images des itérées de θ ,

$$\mathcal{E}_\bullet = (\mathcal{E}_0 = (0) \subsetneq \mathcal{E}_1 = \text{Im}(\theta^{s-1})((1-s)D) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_{s-1} = \text{Im}(\theta)(-D) \subsetneq \mathcal{E}_s = \mathcal{E}).$$

On peut donc associer à (\mathcal{E}, θ) la partition

$$\underline{n}(\mathcal{E}, \theta) = (n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n)$$

définie par $n_i = \text{rang}(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})$ et la suite d'entiers

$$\underline{e}(\mathcal{E}, \theta) = (e_1, \dots, e_s) \text{ avec } e_1 + e_2 + \cdots + e_s = e$$

définie par $e_i = \deg(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})$.

Pour \underline{n} et \underline{e} fixées, les conditions $\underline{n}(\mathcal{E}, \theta) = \underline{n}$ et $\underline{e}(\mathcal{E}, \theta) = \underline{e}$ définissent une partie localement fermée $\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}} \subset f_n^{-1}(0)$. On obtient ainsi une stratification de $f_n^{-1}(0)$ et il suffit de démontrer que pour chaque strate $\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}$, on a

$$\dim(\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}) \leq d_{f_n} - 1.$$

À chaque $(\mathcal{E}, \theta) \in \mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}$, on peut associer la chaîne

$$\mathcal{F}^\bullet = (\mathcal{F}^s \rightarrow \mathcal{F}^{s-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{F}^1)$$

où

$$\mathcal{F}^i = \text{Im}(\theta^{s-i})/\text{Im}(\theta^{s-i+1})(-D) = (\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})((s-i)D)$$

est de rang n_i et de degré

$$f_i = e_i + n_i(s-i)d,$$

et où les flèches induites par θ sont toutes génériquement surjectives. Par suite, pour que la strate $\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}$ soit non vide, il faut que

$$n_s \geq n_{s-1} \geq \cdots \geq n_1$$

et qu'en cas d'égalité $n_{i+1} = n_i$, on ait $e_{i+1} - d \leq e_i$ puisqu'alors $\mathcal{F}_{i+1} \rightarrow \mathcal{F}_i$ est une injection entre \mathcal{O}_X -modules localement libres de même rang. On suppose dans la suite que ces deux dernières conditions sont vérifiées.

Soit $P = MN \subset \text{GL}(n)$ le parabolique standard de sous-groupe de Levi $M = \text{GL}(n_1) \times \text{GL}(n_2) \times \cdots \times \text{GL}(n_s)$, et soit γ l'élément de l'algèbre de Lie \mathfrak{n} de N donné par la matrice par blocs $(\gamma_{i,j})_{i,j=1,\dots,s}$ avec tous les $\gamma_{i,j}$ nuls sauf les $\gamma_{i,i+1} \in \text{Mat}(n_i \times n_{i+1})$ qui sont égaux à $(I, 0)$ où I est la matrice

identité de $\mathrm{GL}(n_i)$ et 0 est la matrice nulle de $\mathrm{Mat}(n_i \times (n_{i+1} - n_i))$. Au point générique de la courbe X , on peut identifier le drapeau \mathcal{E}_\bullet au drapeau

$$(0) \subsetneq F^{n_1} \subsetneq F^{n_1+n_2} \subsetneq \dots \subsetneq F^{n_1+\dots+n_{s-1}} \subsetneq F^n$$

de sorte que la matrice de θ soit précisément γ .

Si on note :

- P_γ le centralisateur de γ dans P ,
- $P(\mathbb{A})^\varepsilon = N(\mathbb{A})M(\mathbb{A})^\varepsilon$ avec

$$M(\mathbb{A})^\varepsilon = \{m = (g_1, \dots, g_s) \in \prod_{i=1}^s \mathrm{GL}(n_i, \mathbb{A}) \mid \deg(\det(g_i)) = -e_i\},$$

- $\mathbf{1}_D$ la fonction caractéristique de $\varpi^{-D}\mathfrak{p}(\mathcal{O})$ dans $\mathfrak{p}(\mathbb{A})$,
 - dp la mesure de Haar à gauche qui donne le volume 1 à $P(\mathcal{O})$,
- le cardinal champêtre de $\mathcal{N}_{\underline{n}}^\varepsilon(\mathbb{F}_q)$ est égal à

$$|\mathcal{N}_{\underline{n}}^\varepsilon(\mathbb{F}_q)| = \int_{P_\gamma(F) \backslash P(\mathbb{A})^\varepsilon} \mathbf{1}_D(p^{-1}\gamma p) dp.$$

On peut calculer cette intégrale en deux temps

$$|\mathcal{N}_{\underline{n}}^\varepsilon(\mathbb{F}_q)| = \int_{M_\gamma(F) \backslash M(\mathbb{A})^\varepsilon} \delta_P^{-1}(m) \int_{N_\gamma(F) \backslash N(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(m^{-1}n^{-1}\gamma nm) dn dm$$

où $M_\gamma = M \cap P_\gamma$, $N_\gamma = N \cap P_\gamma$, dm et dn sont les mesures de Haar sur $M(\mathbb{A})$ et $N(\mathbb{A})$ qui donnent le volume 1 à $M(\mathcal{O})$ et $N(\mathcal{O})$, et δ_P est le caractère modulaire dont la valeur sur $M(\mathbb{A})^\varepsilon$ est constante et égale à

$$q^{\sum_{i < j} (n_j e_i - n_i e_j)}.$$

Maintenant pour m fixé, on a

$$\int_{N_\gamma(F) \backslash N(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(m^{-1}n^{-1}\gamma nm) dn = \mathrm{vol}(N_\gamma(F) \backslash N_\gamma(\mathbb{A}), dn_\gamma) \int_{N_\gamma(\mathbb{A}) \backslash N(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(m^{-1}n^{-1}\gamma nm) \frac{dn}{dn_\gamma}$$

où dn_γ est la mesure de Haar qui donne le volume 1 à $N_\gamma(\mathcal{O})$, et d'après Ranga Rao, la flèche

$$N_\gamma \backslash N \rightarrow \mathfrak{n}', \quad n \mapsto n^{-1}\gamma n - \gamma$$

où $\mathbf{n}' = [\mathbf{n}, \mathbf{n}]$, est un isomorphisme algébrique qui envoie la mesure de Haar adélique $\frac{dn}{dn_\gamma}$ sur la mesure de Haar $d\nu'$ sur $\mathbf{n}'(\mathbb{A})$ qui donne le volume 1 à $\mathbf{n}'(\mathcal{O})$. En particulier, N_γ étant un groupe unipotent de dimension $\sum_{i=1}^{s-1} n_i n_{i+1}$, on a

$$\text{vol}(N_\gamma(F) \backslash N_\gamma(\mathbb{A}), dn_\gamma) = q^{\sum_{i=1}^{s-1} n_i n_{i+1} (g-1)}.$$

Comme

$$\mathbf{1}_D(m^{-1}\gamma m + m^{-1}\nu' m) = \mathbf{1}_D(m^{-1}\gamma m) \mathbf{1}_D(m^{-1}\nu' m)$$

et que

$$\int_{\mathbf{n}'(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(m^{-1}\nu' m) d\nu' = q^{\sum_{i < j-1} (n_j e_i - n_i e_j + n_i n_j d)}$$

ne dépend que de \underline{e} et non de m , on obtient que

$$|\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}(\mathbb{F}_q)| = q^\Delta \int_{M_\gamma(F) \backslash M(\mathbb{A})^{\underline{e}}} \mathbf{1}_D(m^{-1}\gamma m) dm$$

où

$$\begin{aligned} \Delta &= - \sum_{i < j} (n_j e_i - n_i e_j) + \sum_{i < j-1} (n_j e_i - n_i e_j + n_i n_j d) + \sum_{i=1}^{s-1} n_i n_{i+1} (g-1) \\ &= - \sum_{i=0}^{s-1} (n_{i+1} e_i - n_i e_{i+1}) + \sum_{i < j-1} n_i n_j d + \sum_{i=1}^{s-1} n_i n_{i+1} (g-1). \end{aligned}$$

La dernière intégrale

$$\int_{M_\gamma(F) \backslash M(\mathbb{A})^{\underline{e}}} \mathbf{1}_D(m^{-1}\gamma m) dm$$

n'est autre que le cardinal champêtre de la catégorie des chaînes \mathcal{F}^\bullet . Des considérations de poids dans la cohomologie ℓ -adique montrent alors que

$$\dim(\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}) = \dim(\mathcal{C}) + \Delta$$

où \mathcal{C} est le champ des chaînes \mathcal{F}^\bullet .

D'après Garcia-Prada, Heinloth et Schmitt [8],

$$\dim(\mathcal{C}) = \sum_{i=0}^{s-1} n_{i+1} (n_{i+1} - n_i) (g-1) + \sum_{i=0}^{s-1} (n_{i+1} f_i - n_i f_{i+1})$$

avec la convention $n_0 = 0$ et $f_0 = 0$, soit encore

$$\sum_{i=0}^{s-1} n_{i+1}(n_{i+1} - n_i)(g-1) + \sum_{i=0}^{s-1} (n_{i+1}e_i - n_ie_{i+1}) + \sum_{i=1}^{s-1} n_in_{i+1}d$$

avec la convention $e_0 = 0$. Par suite

$$\dim(\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}) = \left(\sum_{i=1}^s n_i^2 \right) (g-1) + \left(\sum_{i<j} n_in_j \right) d.$$

Il ne reste plus qu'à comparer cette dimension de $\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}$ à

$$d_{f_n} - 1 = n(g-1) + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

Si on écrit $d = 2g - 2 + d'$ avec $d' > 0$, on a

$$d_{f_n} - 1 - \dim(\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}) = d' \left(\frac{n(n-1)}{2} - \sum_{i<j} n_in_j \right) = \frac{d'}{2} \sum_{i=1}^s n_i(n_i - 1)$$

et cette expression est donc ≥ 0 , avec égalité si et seulement si tous les n_i sont égaux à 1.

11 Le cas du diviseur canonique

Dans le cas où D est un diviseur canonique, c'est-à-dire $\mathcal{O}_X(D) = \Omega_X^1$, les arguments utilisés jusqu'ici ne permettent pas de contrôler le socle de $Rf_{n,*}^{\text{st}} \mathbb{Q}_{\ell}$. En effet, on a dans ce cas

$$d_{\mathbb{A}_n} = d_{f_n} = n^2(g-1) + 1.$$

et l'inégalité

$$1 - s \geq (n - n_1 - \dots - n_s)(d - 2g + 2)$$

de la fin de la démonstration du théorème 7 est remplacée par

$$0 \geq (n - n_1 - \dots - n_s)(2g - 2 - 2g + 2)$$

qui ne sert à rien. Néanmoins, avec les notations de cette démonstration, pour $a \in \mathbb{A}_{n,\lambda} \cap \text{Socle}(Rf_{n,*}^{\text{st}} \mathbb{Q}_{\ell})$, en combinant les inégalités

$$d_a \geq n_a^+(Rf_{n,*}^{\text{st}} \mathbb{Q}_{\ell}) \geq d_a^{\text{ab}}(J_n)$$

et

$$d_{a_i}^{\text{ab}}(J_{n_i}) \geq d_{a_i}, \quad \forall i = 1, \dots, s,$$

à l'égalité

$$d_a = d_{a_1} + \dots + d_{a_s},$$

on obtient les égalités

$$d_a = n_a^+(Rf_{n,*}^{\text{st}} \mathbb{Q}_\ell) = d_a^{\text{ab}}(J_n)$$

et la première de ces égalités implique que $Rf_{n,*}^{\text{st}, 2d_{f_n}} \mathbb{Q}_\ell$ admet comme facteur direct un faisceau ℓ -adique non trivial de support $\overline{\{a\}}$.

Maintenant, on peut espérer que $Rf_{n,*}^{\text{st}, 2d_{f_n}} \mathbb{Q}_\ell$ est localement constant sur chaque strate $\mathbb{A}_{n,\lambda}$ comme c'est le cas sur les strates contenues dans l'ouvert génériquement régulier semi-simple, c'est-à-dire celles avec λ de la forme $((n_1, \dots, n_s), (1, \dots, 1))$ (voir [5]), et sur la strate nilpotente, c'est-à-dire celle avec $\lambda = ((1), (n))$, sur laquelle \mathcal{N}_n^e et $N_n^{e,\text{st}}$ sont constants (cette strate est isomorphe à $H^0(X, \Omega_X^1)$ et on identifie la fibre en a à la fibre en 0 par $(\mathcal{E}, \theta) \mapsto (\mathcal{E}, \theta - a)$).

Dans le cas où D est un diviseur canonique, on peut donc espérer démontrer que le socle de $Rf_{n,*}^{\text{st}} \mathbb{Q}_\ell$ est contenu dans l'ensemble fini des points génériques des strates $\mathbb{A}_{n,\lambda}$.

Pour $n = 2$, c'est bien le cas puisque la seule strate non contenue dans l'ouvert génériquement régulier semi-simple est la strate nilpotente.

Références

- [1] A. B. Altman and S. L. Kleiman. Compactifying the picard scheme. *Advances in Mathematics*, 35 :50–112, Oct 1980.
- [2] A. Beauville, M. S. Narasimhan, and S. Ramanan. Spectral curves and the generalised theta divisor. *J. reine angew. Math.*, 398 :169–179, 1989.
- [3] A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne. Analyse et topologie sur les espaces singuliers. *Astérisque*, 100 :1–89, Mar 1982.
- [4] S. Bosch, W. Lütkebohmert, and M. Raynaud. *Néron models*. Number 21 in *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge*. Springer-Verlag, 1990.
- [5] P.-H. Chaudouard and G. Laumon. Le lemme fondamental pondéré. II. Énoncés cohomologiques. *Ann. of Math. (2)*, 176(3) :1647–1781, 2012.
- [6] S. Diaz and J. Harris. Ideals associated to deformations of singular plane curves. *Trans. AMS*, pages 433–468, 1988.

- [7] E. Esteves. Compactifying the relative jacobian over families of reduced curves. *Trans. AMS*, 353(8) :3045–3095 (electronic), 2001.
- [8] O. García-Prada, J. Heinloth, and A. H. W. Schmitt. On the motives of moduli of chains and Higgs bundles. *arXiv*, math.AG, Apr 2011. 44 pages.
- [9] N. Hitchin. Stable bundles and integrable systems. *Duke Math. J*, 54(1) :91–114, 1987.
- [10] B. C. Ngô. Le lemme fondamental pour les algèbres de lie. *Pub. math. de l’IHÉS*, 111(1) :1–169, Jun 2010.
- [11] N. Nitsure. Moduli space of semistable pairs on a curve. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 62(2) :275–300, 1991.
- [12] R. Ranga Rao. Orbital integrals in reductive groups. *Ann. of Math.*, 96(3) :505–510, 1972.
- [13] D. Schaub. Courbes spectrales et compactifications de jacobiniennes. *Math. Z.*, 227(2) :295–312, 1998.

Pierre-Henri Chaudouard
 Université Paris Diderot (Paris 7)
 Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche
 UMR 7586
 Bâtiment Sophie Germain, Case 7012
 F-75205 PARIS Cedex 13, France
 Pierre-Henri.Chaudouard@imj-prg.fr

Gérard Laumon
 CNRS et Université Paris-Sud
 UMR 8628
 Mathématique, Bâtiment 425
 F-91405 Orsay Cedex , France
 gerard.laumon@math.u-psud.fr